ΘΕΩΡΙΑ:

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (1)$$

όπου οι συντελεστές $a_i(x)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, είναι δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq R$.

Ορισμός 1. Ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή L μέσω της σχέσης

$$L := D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x), \quad (2)$$

όπου $D^i := \dfrac{d^i}{dx^i}$, $i = 1,2,\dots,n$. Τότε η (1) γράφεται στη μορφή

$$L(y) = 0. \quad (3)$$

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 1 είναι η ακόλουθες δύο προτάσεις:

Πρόταση 1. Ο τελεστής (2) είναι **γραμμικός**, δηλ.

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2),$$

για κάθε σταθερές c_1, c_2 και κάθε n-φορές διαφορίσιμες συναρτήσεις y_1, y_2.

Πρόταση 2. (**Αρχή της υπέρθεσης λύσεων**)

Αν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της εξίσωσης (3) τότε και κάθε *γραμμικός συνδυασμός* τους $c_1y_1 + c_2y_2$, όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές, είναι επίσης λύση της (3).

Ορισμός 2. Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, οι οποίες ορίζονται σ' ένα διάστημα $I \subseteq R$, είναι **γραμμικώς ανεξάρτητες** (ή ότι το σύνολο $\{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητο**) αν οι μοναδικές σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$ για τις οποίες ισχύει η ταυτότητα

$$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

είναι $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Θεώρημα 1. Κάθε ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (3) έχει n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις. Αν $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ είναι ένα τέτοιο σύνολο λύσεων τότε η γενική λύση της (3) δίνεται από την σχέση

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x), \quad (4)$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

Ορισμός 3. Έστω σύνολο $S := \{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)\}$, n το πλήθος συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται σ' ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq R$ και είναι n-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες σ' αυτό. Η $n \times n$ ορίζουσα

$$W(x) := W(u_1, u_2, \ldots, u_n) := \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ u_1'' & u_2'' & & u_n'' \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & & . \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

ονομάζεται **Wronkian** του συνόλου S.

Θεώρημα 2. **(J. Liouville)**

Αν $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ είναι n το πλήθος λύσεις της εξίσωσης (3) στο διάστημα I, τότε για την ορίζουσα Wronski $W(x) := W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ισχύει ο ακόλουθος τύπος του **Abel**:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(s) ds \right), \quad (6)$$

όπου $x, x_0 \in I$.

Πόρισμα. Έστω ότι $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ είναι n το πλήθος λύσεις της εξίσωσης (3) στο διάστημα I. Τότε, είτε

I) $W(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$,

είτε

II) $W(x) \equiv 0$ στο I.

Θεώρημα 3. Ένα σύνολο $S := \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, n το πλήθος λύσεων της εξίσωσης (3) είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αν και μόνον αν η Wronskian $W(x) := W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ στο I.

Ορισμός 4. Κάθε σύνολο $S := \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, n το πλήθος λύσεων της εξίσωσης (3) στο διάστημα I για το οποίο ισχύει ότι

$$W(x) := W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \text{ στο } I,$$

θα λέγεται **θεμελιώδες σύνολο λύσεων** της (3).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $(-\infty, \infty)$:

1. $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{-x}$

2. $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$, $u_3(x) = x^2$

Λυση

1. Θα πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε $|c_1| + |c_2| \neq 0$ ενώ ταυτόχρονα

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} \equiv 0, \quad (1)$$

ή ισοδύναμα,

$$c_2 \equiv -c_1 e^{2x}. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε μη μηδενική τιμή της σταθεράς c_1 το μεν αριστερό σκέλος της (2) είναι σταθερό ως προς x ενώ το δεξιό όχι. Συνεπώς, για να ισχύει η (2) θα πρέπει αναγκαστικά να είναι $c_1 = c_2 = 0$, δηλ. οι συναρτήσεις $u_1(x) = e^x$ και $u_2(x) = e^{-x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο R.

2. Θα πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 και c_3 τέτοιες ώστε $|c_1|+|c_2|+|c_3|\neq 0$ ενώ ταυτόχρονα

$$c_1x^2+c_2x+c_3\equiv 0 \;. \quad (1)$$

Παρατηρούμε όμως ότι αν οι σταθερές c_1, c_2, c_3 δεν είναι όλες μηδέν τότε η (1) δεν μπορεί να ισχύει παρά μόνον για δύο το πολύ τιμές της μεταβλητής x (δηλ. τις ρίζες του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου στο αριστερό σκέλος). Συνεπώς για να ισχύει η (1) ταυτοτικά θα πρέπει να είναι $c_1=c_2=c_3=0$, δηλ. οι συναρτήσεις $u_1(x)=1$, $u_2(x)=x$ και $u_3(x)=x^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο R.

3. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $u_1(x)=x^3$ και $u_2(x)=|x|^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $(-\infty,\infty)$ ενώ παράλληλα η Wronskian $W(u_1,u_2)\equiv 0$.

4. Η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''-\frac{2}{x}y'=0, \quad x\in(-1,1),$$

δέχεται ως λύσεις τις συναρτήσεις $y_1(x)=x^3$ και $y_2(x)=|x|^3$ οι οποίες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $(-1,1)$ ενώ $W(y_1,y_2)\equiv 0$ (βλέπε Άσκηση 3). Έρχεται αυτό σε αντίθεση με το Θεώρημα 3 ;

5. Δείξτε ότι συναρτήσεις $y_1(x)=\sqrt{x}$ και $y_2(x)=x^{-1}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$2x^2y''+3xy'-y=0, \quad x>0.$$

6. Έστω $u_1(x), u_2(x),\ldots,u_n(x)$, n το πλήθος συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σ' ένα ανοικτό διάστημα $I\subseteq R$ και είναι n-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες σ' αυτό. Αν η Wronskian $W(u_1,u_2,\ldots,u_n)\neq 0$ για κάθε $x\in I$, δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση τάξης n

$$W(y,u_1,u_2,\ldots,u_n) := \begin{vmatrix} y & u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ y' & u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ y'' & u_1'' & u_2'' & \ldots & u_n'' \\ . & . & . & \ldots & . \\ y^{(n-1)} & u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

έχει ως θεμελιώδες σύνολο λύσεων τις συναρτήσεις $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x)$.

7. Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα (a,b). Δείξτε ότι οι συναρτήσεις y_1 και y_2 δεν μπορούν να έχουν κοινά σημεία καμπής στο (a,b) εκτός αν οι συντελεστές p και q μηδενίζονται ταυτόχρονα σ'αυτά.

ΛΥΣΕΙΣ

3. Θεωρούμε την ταυτότητα

$$c_1x^3 + c_2\,|\,x\,|^3 \equiv 0,\ x \in R, \quad (1)$$

όπου c_1, c_2 είναι πραγματικές σταθερές. Θέτοντας διαδοχικά στην (1) $x=1$ και $x=-1$ παίρνουμε το σύστημα

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$-c_1 + c_2 = 0.$$

από το οποίο προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 0$. Κατά συνέπεια οι δοθείσες συναρτήσεις $u_1(x)$ και $u_2(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Από την άλλη μεριά η Wronskian των $u_1(x)$ και $u_2(x)$ είναι

$$W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & |\,x\,|^3 \\ \dfrac{d}{dx}(x^3) & \dfrac{d}{dx}(|\,x\,|^3) \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Όμως

$$\frac{d}{dx}(|x|^3) = \begin{Bmatrix} 3x^2 & , & x > 0 \\ 0 & , & x = 0 \\ -3x^2 & , & x < 0 \end{Bmatrix},$$

και άρα

αν $x > 0$ τότε $W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$,

αν $x = 0$ τότε $W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

και αν $x > 0$ τότε $W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$.

Συνεπώς, $W(u_1,u_2) = 0$ για κάθε $x \in R$.

4. Το ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = x^3$ και $y_2(x) = |x|^3$ αποτελούν λύσεις του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών επιβεβαιώνεται άμεσα με απ΄ευθείας αντικατάσταση στη εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες.Επίσης το γεγονός ότι αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $(-1,1)$ ενώ $W(y_1,y_2) \equiv 0$ προκύπτει από την λύση της Άσκησης 3. Αυτό όμως δεν έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα 3 αφού ο συντελεστής

$$a_1(x) = -\frac{2}{x},$$

δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο σημείο $x = 0$ του διαστήματος $(-1,1)$.

5. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι γραμμική ομογενής δευτέρας τάξης με συντελεστές $a_1(x) = 3/2x$ και $a_2(x) = -1/2x^2$ οι οποίοι ορίζονται και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,\infty)$. Το γεγονός ότι οι $y_1(x) = \sqrt{x}$ και $y_2(x) = x^{-1}$ αποτελούν δύο λύσεις επιβεβαιώνεται εύκολα με απ΄ ευθείας αντικατάσταση. Επιπλέον, η Wronskian των y_1 και y_2 είναι

$$W(y_1,y_2) := \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{d}{dx}(x^{1/2}) & \frac{d}{dx}(x^{-1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}x^{-3/2} \neq 0,$$

και άρα, με βάση το Θεώρημα 3, αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, δηλ. αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

6. Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$W(y, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \quad (1)$$

είναι άμεσο γιατί αν θέσουμε σ' αυτήν $y = u_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, προκύπτει μια ορίζουσα με δύο στήλες ίσες, δηλ. εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν. Αναπτύσσοντας τώρα την Wronskian στο αριστερό μέλος της (1) ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης παίρνουμε

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n)}(x) - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)}(x) + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ u_1'' & u_2'' & \ldots & u_n'' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} \end{vmatrix} y = 0 \quad . (2)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του $y^{(n)}(x)$ στην (2) είναι ακριβώς η Wronskian των $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$, η οποία εξ΄ υποθέσεως δεν μηδενίζεται στο I. Διαιρώντας έτσι αμφότερα τα μέλη με $W(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ παίρνουμε την γραμμική και ομογενή διαφορική εξίσωση τάξης n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) y = 0 \quad , (3)$$

όπου

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n-1}(x) := \dfrac{W_n(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{W(u_1,u_2,\ldots,u_n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1(x) := \dfrac{W_2(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{W(u_1,u_2,\ldots,u_n)} \\ a_0(x) := \dfrac{W_1(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{W(u_1,u_2,\ldots,u_n)} \end{array}\right\} \quad (4)$$

και για κάθε δείκτη k η $W_k(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ είναι μια ορίζουσα τύπου Wronski όπου τα στοιχεία της $n-k$ γραμμής έχουν τάξη παραγώγισης μεγαλύτερη κατά 1 από αυτήν των αντίστοιχων στοιχείων της $W(u_1,u_2,\ldots,u_n)$. Επειδή τώρα, εξ' υποθέσεως, οι συναρτήσεις $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x)$ είναι n-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο I, οι συντελεστές (4) είναι επίσης συνεχείς στο I. Επιπλέον, για κάθε $x \in I$ είναι

$$W(u_1,u_2,\ldots,u_n) \neq 0$$

και άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, οι $u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x)$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της εξίσωσης (1).

7. Έστω x_0 ένα κοινό σημείο καμπής των $y_1(x)$ και $y_2(x)$ στο (a,b). Παρατηρούμε ότι αφού οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της δευτεροτάξιας γραμμικής εξίσωσης

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \quad (1)$$

όπου οι συντελεστές $p(x)$ και $q(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο (a,b), θα έχουν συνεχείς δεύτερες παραγώγους στο (a,b) και άρα στο σημείο καμπής x_0 θα είναι

$$y_1'(x_0)=y_2''(x_0)=0. \quad (2)$$

Συνεπώς από τις (1) και (2) θα έχουμε επίσης

$$p(x_0)y_1'(x_0)+q(x_0)y_1(x_0)=0, \quad (3)$$

και

$$p(x_0)y_2'(x_0)+q(x_0)y_2(x_0)=0. \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την σχέση (3) με $y_2(x_0)$, την σχέση (4) με $y_1(x_0)$ και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε ότι

$$p(x_0)\left[y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_2(x_0)y_1'(x_0)\right]=0,$$

ή ισοδύναμα

$$p(x_0)W\left(y_1(x_0),y_2(x_0)\right)=0, \quad (5)$$

όπου $W\left(y_1(x_0),y_2(x_0)\right)$ είναι η τιμή της Wronskian των y_1 και y_2 στο σημείο x_0. Αφού όμως αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (1) στο (a,b), η $W(y_1,y_2)$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο (a,b) και συνεπώς από την (5) προκύπτει ότι $p(x_0)=0$. Έτσι οι σχέσεις (3) και (4) παίρνουν τη μορφή

$$q(x_0)y_1(x_0)=0, \quad (6)$$

και

$$q(x_0)y_2(x_0)=0, \quad (7)$$

αντίστοιχα. Αν τώρα $q(x_0)\neq 0$ τότε θα πρέπει να είναι $y_1(x_0)=y_2(x_0)=0$. Αυτό όμως είναι επίσης αδύνατο αφού $W\left(y_1(x_0),y_2(x_0)\right)\neq 0$. Άρα $q(x_0)=0$.